



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Mechanika i wytrzymałość materiałów

Wykład Nr 13

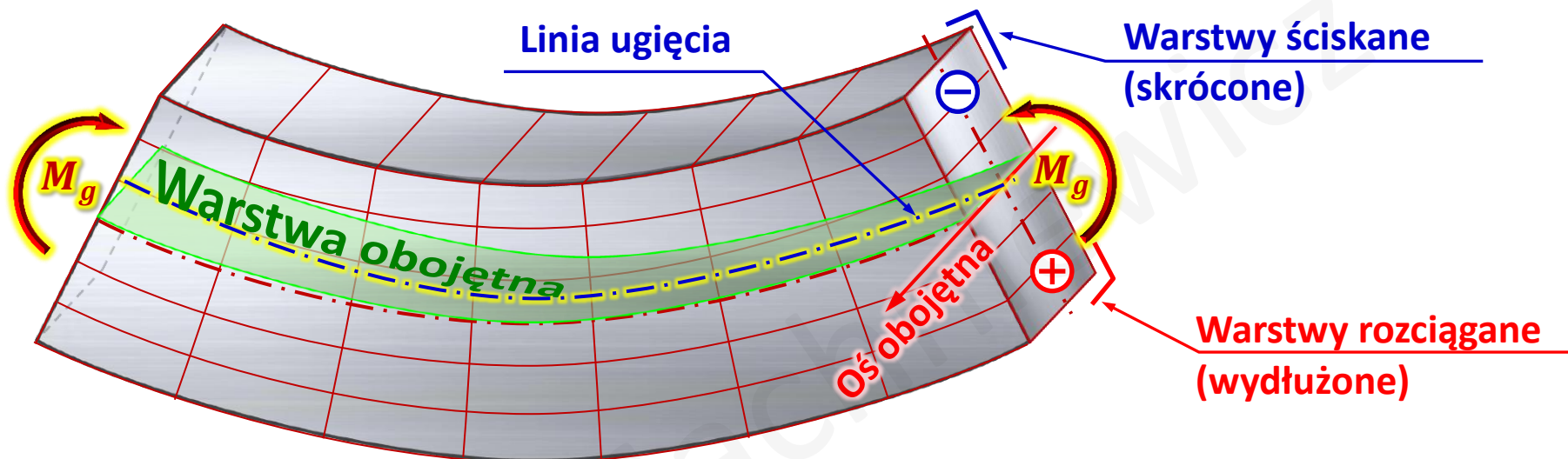
Odształcenia belek zginanych

linia ugięcia belki, kąt obrotu belki, warunek sztywności przy zginaniu, równanie różniczkowe linii ugięcia belki, warunki brzegowe, zastosowanie zasady superpozycji do wyznaczania odształceń belek, przykłady obliczeniowe

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

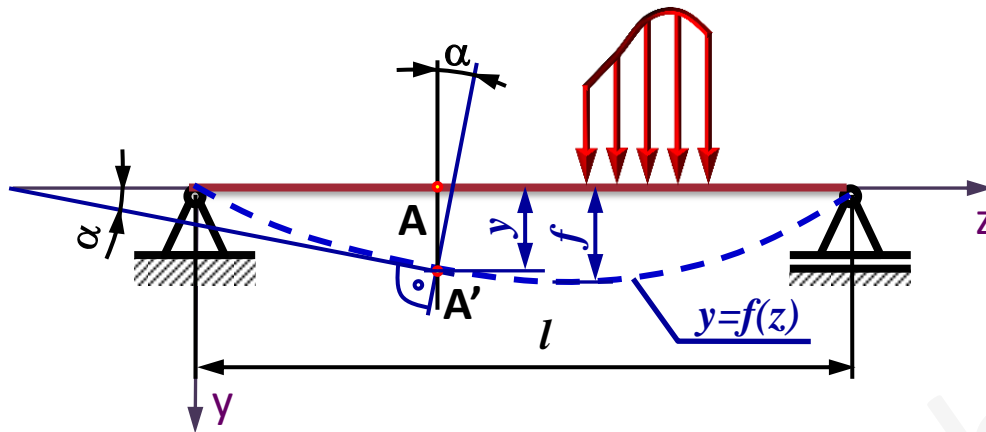
13.1. Linia ugięcia belki



Linia ugięcia – linia łącząca środki ciężkości przekrojów poprzecznych odkształconej belki.

Proste zginanie – przypadek obciążenia kiedy wypadkowy moment zginający w przekroju poprzecznym belki działa wzdłuż jednej z głównych osi bezwładności.

13.2. Warunek sztywności belki



Równanie linii ugięcia belki: $y=f(z)$

Strzałka ugięcia: $f=\max(|y|)$

Warunek sztywności belki:

$$f \leq f_{dop}$$

f_{dop} - dopuszczalna strzałka ugięcia
(..., **mm**, cm, ...)

Zwykle: $f_{dop} = \frac{l}{k}$ l – długość belki,
 k – współczynnik zależny od przeznaczenia belki,

Kąt obrotu belki:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{dy}{dz}$$

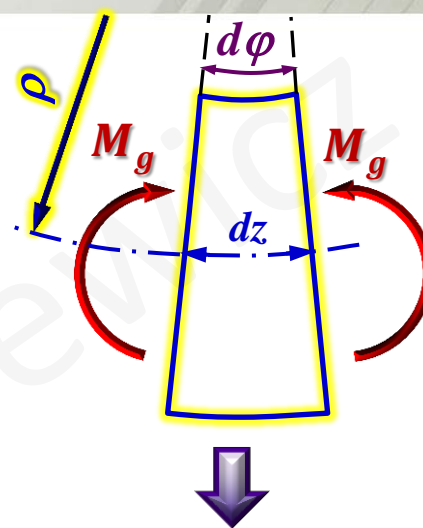
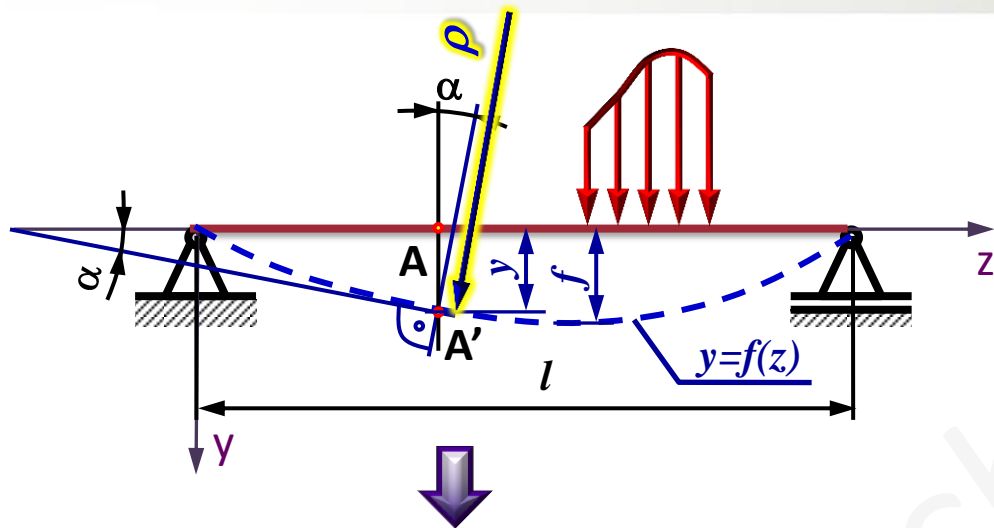
y – ugięcie belki w danym punkcie,
 α – kąt obrotu belki (*rad*)

Ponieważ zwykle kąt α jest bardzo mały, więc: $\operatorname{tg}(\alpha) \cong \alpha$

Stąd:

$$\alpha = \frac{dy}{dz}$$

13.3. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki



Według geometrii różniczkowej
(dla układu osi y-z jak wyżej):

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

=

Krzywizna osi belki
poddanej czystemu zginaniu
(por. zginanie – war. bezpieczeństwa):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g(z)}{EJ}$$

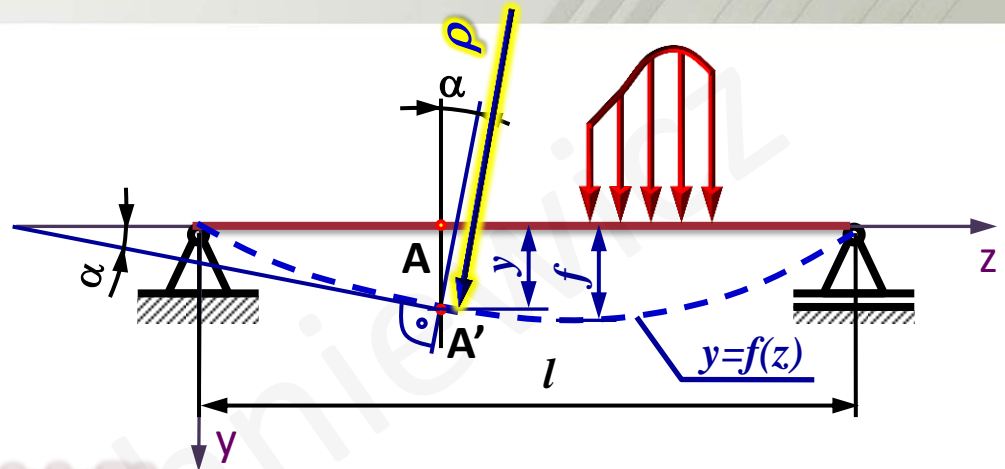
(EJ) - sztywność giętna



13.3. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

$$-\frac{d^2 y}{dz^2} \left[1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{M_{g(z)}}{EJ}$$

ponieważ: $\left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \cong 0$



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki:

$$EJ \frac{d^2 y}{dz^2} = -M_{g(z)}$$

- E – moduł Younga
- J – moment bezwładności
- $M_{g(z)}$ – moment gnący
- y – ugięcie belki

jednokrotne całkowanie

$$EJ \frac{dy}{dz} = \int -M_{g(z)} dz + C$$

- równanie ma kąt obrotu ($\alpha = \frac{dy}{dz}$)

powtórne całkowanie

$$EJ y = \iint -M_{g(z)} dz dz + Cz + D$$

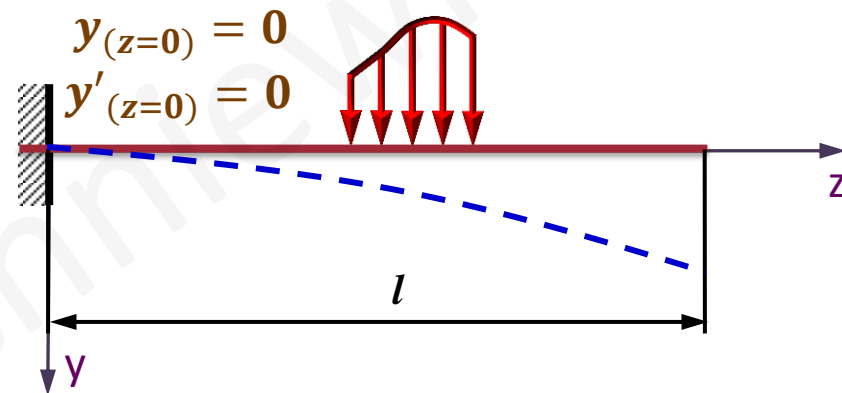
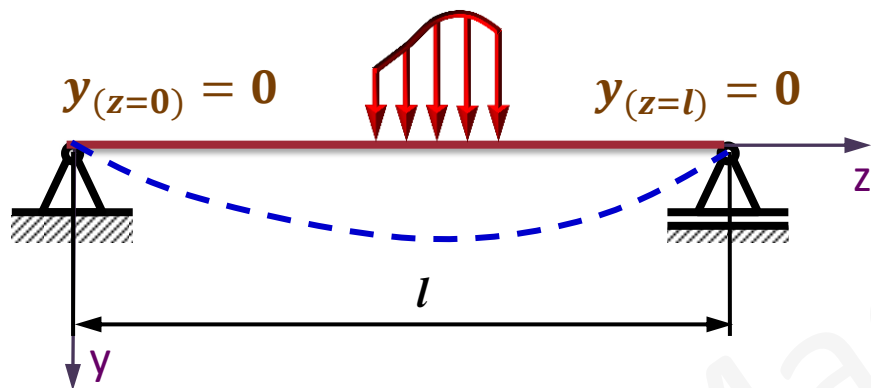
- równanie linii ugięcia

C, D – stałe całkowania, wyznaczane na podstawie warunków brzegowych

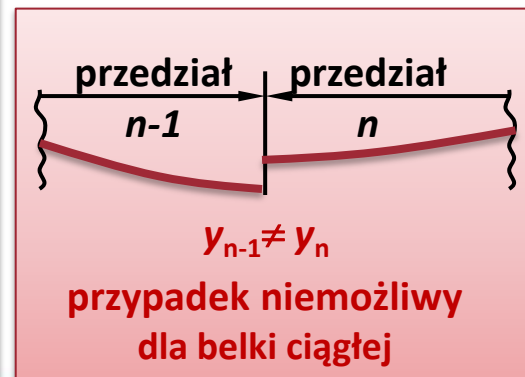
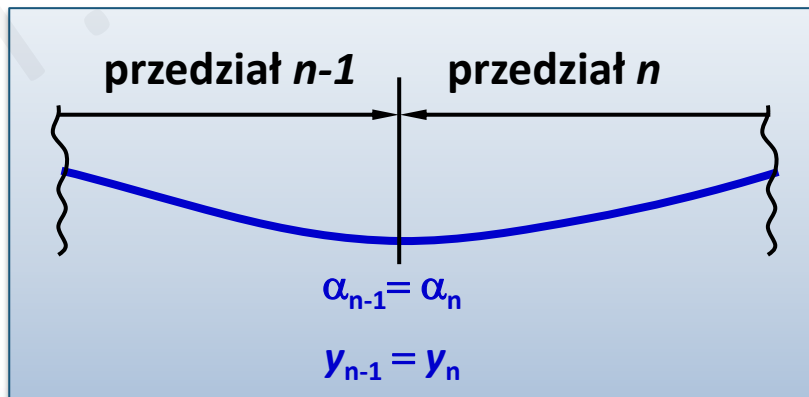
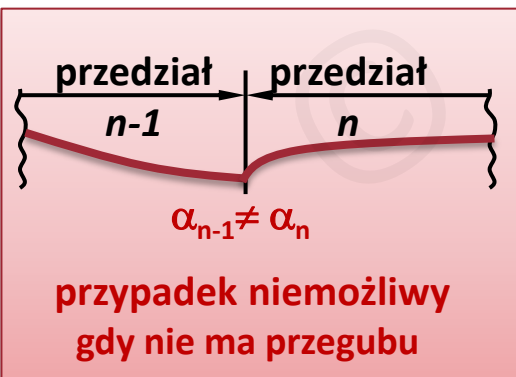
13.3. Warunki brzegowe – wyznaczanie stałych całkowania

Stałe całkowania C i D wyznacza się:

a) z warunków brzegowych, tzw. warunków podparcia:



b) z warunków ciągłości odkształceń w sąsiednich przedziałach, tzw. warunków szycia (belki o wielu przedziałach zmienności funkcji momentu $M_g(z)$):

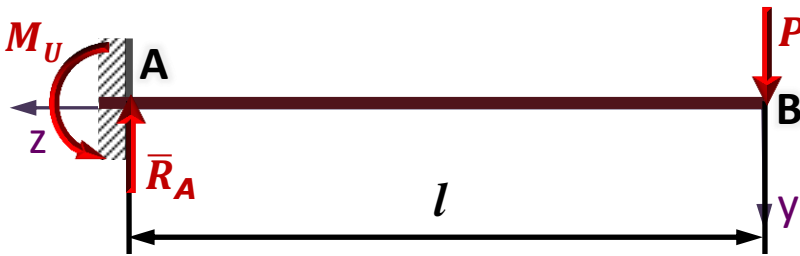


Przykład 13.1

Wyznaczyć ugięcie (f_B) i kąt obrotu (α_B) na swobodnym końcu belki jak na rysunku.

Dane: EJ, P, l Szukane: f_B, α_B

Warunki brzegowe:



$$1) \quad \alpha_A = 0 \Rightarrow y'(z=l) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{Pl^2}{2} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$2) \quad y_A = 0 \Rightarrow y(z=l) = 0$$

$$\hookrightarrow \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^2}{2}l + D = 0 \Rightarrow D = \frac{Pl^3}{3}$$

$$EJy'' = -M_{g(z)}$$

$$0 \leq z \leq l \quad M_{g(z)} = -Pz$$

$$EJy'' = -M_{g(z)} = Pz$$

$$EJy' = \frac{Pz^2}{2} + C$$

$$EJy = \frac{Pz^3}{6} + Cz + D$$

Równania kątów obrotu i linii ugięcia mają postać:

$$\alpha = y' = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pz^2}{2} - \frac{Pl^2}{2} \right) \quad y = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pz^3}{6} - \frac{Pl^2}{2}z + \frac{Pl^3}{3} \right)$$

Stąd:

$$\alpha_B = y'(z=0) = -\frac{Pl^2}{2EJ}$$

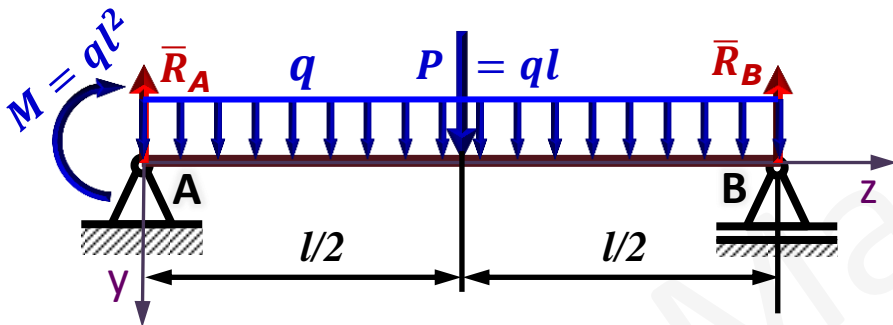
$$f_B = y(z=0) = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

13.4. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 13.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

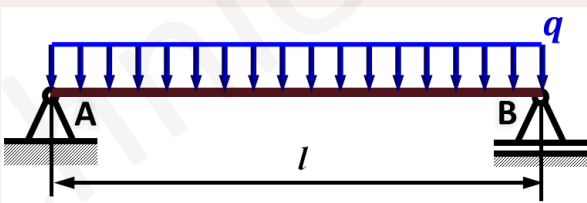
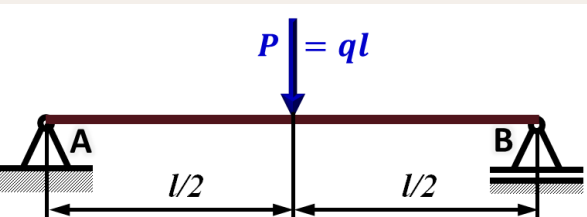
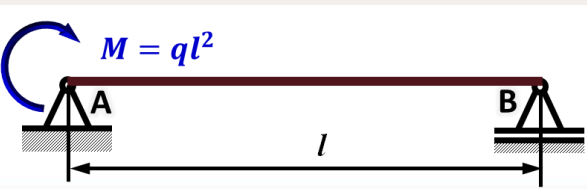
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$f_{(l/2)} = f_{z=l/2}^q + f_{z=l/2}^P + f_{z=l/2}^M$$

$$f_{(l/2)} = \frac{5ql^4}{384EJ} + \frac{ql \cdot l^3}{48EJ} + \frac{3 \cdot ql^2 \cdot l^2}{48EJ}$$

$$f_{(l/2)} = \frac{37ql^4}{384EJ}$$

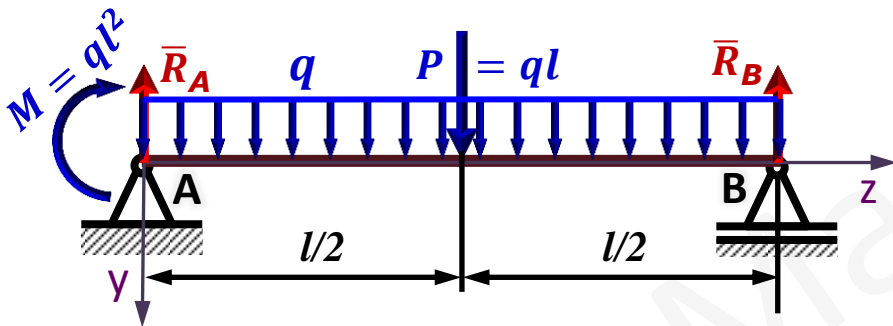
Schemat obciążenia:	Wzory:
	$\alpha_{A,B}^q = \frac{ql^3}{24EJ}$ $f_{(l/2)}^q = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\alpha_{A,B}^P = \frac{Pl^2}{16EJ}$ $f_{(l/2)}^P = \frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\alpha_A^M = \frac{Ml}{3EJ}$ $\alpha_B^M = \frac{Ml}{6EJ}$ $f_{(l/2)}^M = \frac{3Ml^2}{48EJ}$

13.4. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 13.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

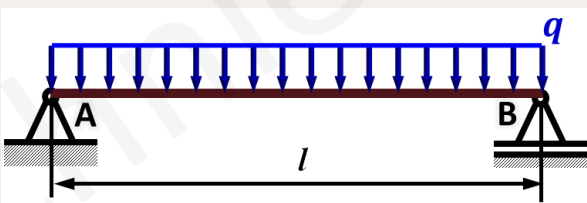
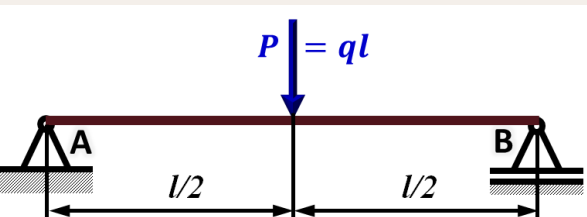
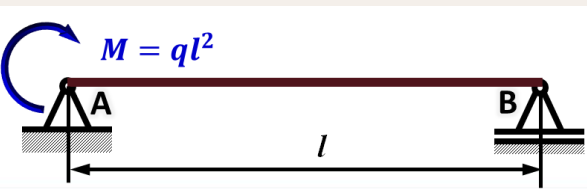
Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$



$$\alpha_A = \alpha_A^q + \alpha_A^P + \alpha_A^M$$

$$\alpha_A = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql \cdot l^2}{16EJ} + \frac{ql^2 \cdot l}{3EJ}$$

$$\alpha_A = \frac{21ql^3}{48EJ}$$

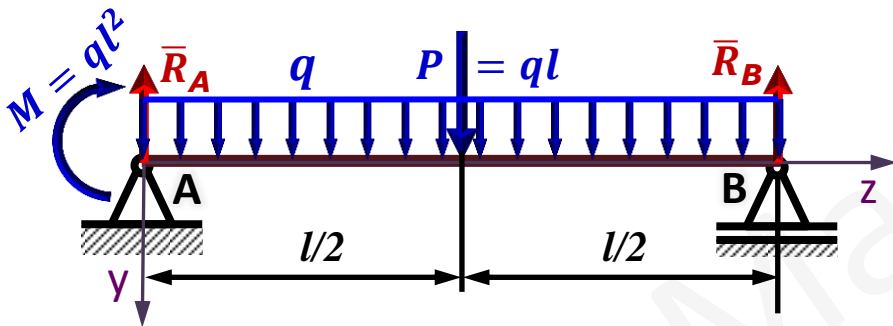
Schemat obciążenia:	Wzory:
	$\alpha_{A,B}^q = \frac{ql^3}{24EJ}$ $f_{(l/2)}^q = \frac{5ql^4}{384EJ}$
	$\alpha_{A,B}^P = \frac{Pl^2}{16EJ}$ $f_{(l/2)}^P = \frac{Pl^3}{48EJ}$
	$\alpha_A^M = \frac{Ml}{3EJ}$ $\alpha_B^M = \frac{Ml}{6EJ}$ $f_{(l/2)}^M = \frac{3Ml^2}{48EJ}$

13.4. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 13.2

Korzystając z gotowych wzorów na wartości ugięć i kątów obrotu belek obciążonych poszczególnymi rodzajami obciążeń, obliczyć zgodnie z zasadą superpozycji ugięcie środka ($y_{(l/2)}$) oraz kąty obrotu w przekrojach podporowych (α_A, α_B) belki jak na rysunku.

Dane: EJ, q, l Szukane: $f_{(l/2)}, \alpha_A, \alpha_B$

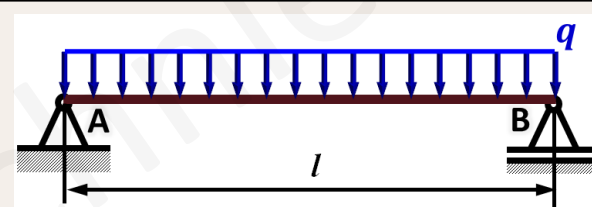


$$\alpha_B = \alpha_B^q + \alpha_B^P + \alpha_B^M$$

$$\alpha_B = \frac{ql^3}{24EJ} + \frac{ql \cdot l^2}{16EJ} + \frac{ql^2 \cdot l}{6EJ}$$

$$\alpha_B = \frac{13ql^3}{48EJ}$$

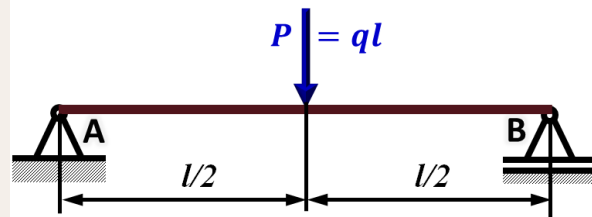
Schemat obciążenia:



Wzory:

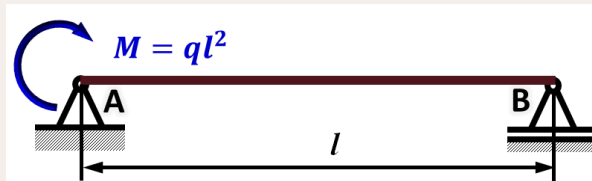
$$\alpha_{A,B}^q = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$f_{(l/2)}^q = \frac{5ql^4}{384EJ}$$



$$\alpha_{A,B}^P = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

$$f_{(l/2)}^P = \frac{Pl^3}{48EJ}$$



$$\alpha_A^M = \frac{Ml}{3EJ}$$

$$\alpha_B^M = \frac{Ml}{6EJ}$$

$$f_{(l/2)}^M = \frac{3Ml^2}{48EJ}$$